

Övningar om mängders kardinalitet

Övning 1. Förklara varför följande mängder är uppräknliga:

1. $\{n \in \mathbb{N}: n \geq 10\}$,
2. $\left\{\frac{5}{2n}: n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$,
3. $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21\}$,
4. mängden av lösningar till den Diophantiska ekvationen $5x + 3y = 1$.

Övning 2. Vilka av mängderna i föregående uppgift har samma kardinalitet som \mathbb{N} ?

Övning 3. Visa att relationen $=_c$ har samma egenskaper som en ekvivalensrelation, d.v.s. den är reflexiv, symmetrisk och transitiv.¹

Övning 4. Visa att $X \geq_c Y$ om och endast om det finns en surjektion från X till Y .

Övning 5. Låt L vara mängden av alla linjer i xy -planet som passerar igenom $(0, 0)$. Avgör om L är uppräknlig eller ej.

Övning 6. Låt X och Y vara uppräknliga. Visa att även $X \cup Y$ är uppräknlig.

Övning 7. Låt X och Y vara uppräknliga. Visa att även $X \times Y$ är uppräknlig.

Övning 8. Låt X_n vara uppräknlig för varje $n \in \mathbb{N}$. Visa att även $\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ är uppräknlig.

Övning 9. Låt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ och $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ vara två ändliga mängder.

1. Ange ett krav på n och m som är ekvivalent med att det finns en injektion från A till B .
2. Ange ett krav på n och m som är ekvivalent med att det finns en surjektion från A till B .
3. Ange ett krav på n och m som är ekvivalent med att det finns en bijektion från A till B .

Övning 10. Låt A och B vara som i föregående övning. Beräkna i vart och ett av fallen hur många injektioner/surjektioner/bijektioner det finns.

OBS: att beräkna antalet surjektioner är mycket mer komplicerat än de övriga, så spendera inte för mycket tid med detta. Se facit för ledning.

¹Tips: Kom ihåg att om f är en bijektion så är också f^{-1} en bijektion.

Övning 11.

1. Konstruera en bijektion mellan $[0, 1]$ och $[3, 8]$.
2. Konstruera en bijektion mellan $[0, 1]$ och $[a, b]$ där a, b är reella tal som uppfyller $a < b$.
3. Konstruera en bijektion mellan $[a, b]$ och $[c, d]$ där a, b, c, d är reella tal som uppfyller $a < b$ och $c < d$.

Övning 12. Visa att $[0, 1] =_c (0, 1)$.²

Övning 13. Låt X vara mängden av alla oändliga talföljder av nollor och ettor, d.v.s. alla följder $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ där varje a_n är antingen 0 eller 1. Visa att X är en överuppräknelig mängd genom att använda Cantors diagonalmetod.

²Tips: Att konstruera en bijektion kan vara svårt. Försök isåfall att använda de satser som gåtts igenom.

Facit och ledningar

- Övning 1.**
1. Mängden är en delmängd av den uppräknliga mängden \mathbb{N} .
 2. Mängden är en delmängd av den uppräknliga mängden \mathbb{Q} .
 3. Mängden är en delmängd av den uppräknliga mängden \mathbb{N} .
 4. Det finns en bijektion mellan lösningsmängden och \mathbb{Z} som ges av $n \mapsto (x_0 - bn, y_0 + an)$. Eftersom \mathbb{Z} är uppräknlig är därför lösningsmängden också uppräknlig.

Övning 2. Mängderna från 1, 2 och 4.

Övning 3.

Reflexiv: Det finns alltid en enkel bijektion från en mängd till sig själv.

Symmetrisk: Hur betar sig inversen av en bijektion?

Transitiv: Hur betar sig sammansättningen av två bijektioner?

Övning 4. Om $X \geq_c Y$ finns en injektion från Y till X . Använd denna för att skapa en surjektion från X till Y . Glöm inte att definiera hur den avbildar elementen i X som inte träffas av injektionen. Om å andra sidan det finns en surjektion $f: X \rightarrow Y$ kan vi välja ut ett element³ x ur varje Urbild $f^{-1}(y) = \{x \in X: f(x) = y\}$. Använd detta för att skapa en injektion $Y \rightarrow X$.

Övning 5. Nej, mängden L är inte uppräknlig. Jämför med reella talen.

Övning 6. Jämför med hur vi visade att $\mathbb{N} =_c \mathbb{Z}$: skicka vartannat naturligt tal på ett element i X och vartannat på ett element i Y .

Övning 7. Jämför med hur vi visade att $\mathbb{Z} =_c \mathbb{Q}$: skicka elementen på diagonaler.

Övning 8. Samma idé som i föregående uppgift.

Övning 9. 1. $n \leq m$

2. $n \geq m$

3. $n = m$

Övning 10. 1. $\binom{m}{n}n!$

2. Den här är en riktig kluring. Det man kan göra någorlunda enkelt är att hitta en rekursiv formel för antalet surjektioner.

Om vi låter $f(n, m)$ vara antalet surjektioner från en mängd med n element till en mängd med m element. Vi vill räkna på hur många sätt vi kan skapa en surjektion $g: A \rightarrow B$. Vi börjar med att sätta $g(a_1) = b_j$ för något j . Här har vi m olika valmöjligheter.

³Detta är väldigt subilt. Den intresserade kan läsa om urvalsaxiomet på t.ex. wikipedia.

Efter att ha valt $g(a_1)$ betraktar vi vad g gör med mängden $A \setminus \{a_1\}$. Här finns två alternativ: antingen har vi $g(a_k) \neq b_j$ för alla återstående $k \geq 2$ eller så har vi att det finns något a_k som också skickas på b_j , $g(a_k) = b_j$. I det första fallet ska vi skapa en surjektion från $A \setminus \{a_1\}$, som har $n - 1$ element, till mängden $B \setminus \{b_j\}$, som har $m - 1$ element. Antalet sådana surjektioner är därför $f(n - 1, m - 1)$. I det andra fallet ska vi skapa en surjektion från $A \setminus \{a_1\}$ till mängden B eftersom det ska finnas ytterligare ett element som avbildas på samma b_j . Antalet sådana surjektioner är $f(n - 1, m)$.

Sammanlagt får vi då rekursionsformeln $f(n, m) = m(f(n-1, m-1) + f(n-1, m))$. Det slutliga svaret är relaterat till de så kallade Stirlingtalen av andra slaget, se Wikipedia.

3. $n!$

Övning 11. 1. Till exempel $f(x) = 5x + 3$.

2. Till exempel $f(x) = (b - a)x + a$.

3. Till exempel $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x - a) + c$.

Övning 12. Konstruera en injektion $[0, 1] \rightarrow (0, 1]$ och en injektion $(0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Använd sedan Schröder-Bernsteins sats.

Övning 13. Konstruera en följd b av nollor och ettor som omöjligt kan vara med i en uppräknig.